

# TÓPICOS DO CÁLCULO VETORIAL

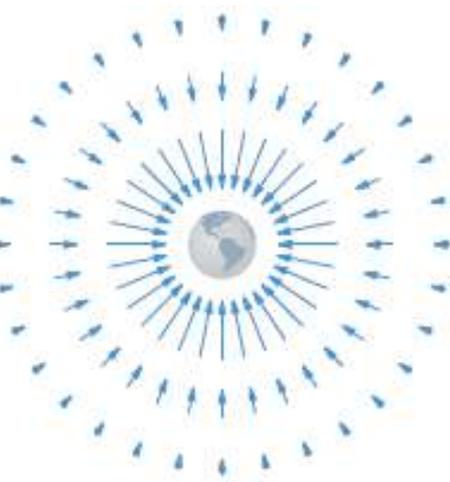
O ramo da Matemática que estudaremos aqui preocupa-se com a análise de vários tipos de fluxos: por exemplo, o fluxo de um fluído ou o fluxo da eletricidade. Na verdade, os primeiros textos de Cálculo de Isaac Newton estão repletos de termos como “fluxão” e “fluente”, que têm como raiz o termo latim *fluere* (fluir).



INSTITUTO FEDERAL  
SANTA CATARINA

# CAMPOS VETORIAIS

Considere um ponto de massa *unitária* localizado em qualquer ponto do Universo. De acordo com a Lei da Gravitação Universal de Newton, a Terra exerce uma força atrativa sobre a massa na direção do centro da Terra e de grandeza inversamente proporcional ao quadrado da distância da massa ao centro da Terra. Essa associação de vetores de força com pontos no espaço é chamada de **campo gravitacional** da Terra.



105  
ANOS

REDE FEDERAL  
DE EDUCAÇÃO  
PROFISSIONAL  
E TECNOLÓGICA  
1909-2014



**15.1.1 DEFINIÇÃO** Um *campo vetorial* em um plano é uma função que associa a cada ponto  $P$  do plano um único vetor  $F(P)$  paralelo ao plano. Analogamente, um campo vetorial no espaço tridimensional é uma função que associa a cada ponto  $P$  do espaço tridimensional um único vetor  $F(P)$  do espaço.

Observe que nessa definição não há referência a um sistema de coordenadas. Entretanto, para fins de cálculo é, normalmente, desejável introduzir um sistema de coordenadas, de modo que se possa designar componentes para os vetores. Especificamente, se  $F(P)$  for um campo vetorial em um sistema de coordenadas  $xy$ , então o ponto  $P$  terá coordenadas  $(x, y)$  e o vetor associado terá componentes que são funções de  $x$  e  $y$ . Assim, o campo vetorial  $F(P)$  pode ser expresso como

$$F(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$$

De modo análogo, no espaço tridimensional com um sistema de coordenadas  $xyz$ , um campo vetorial  $F(P)$  pode ser expresso como

$$F(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$$



INSTITUTO FEDERAL  
SANTA CATARINA

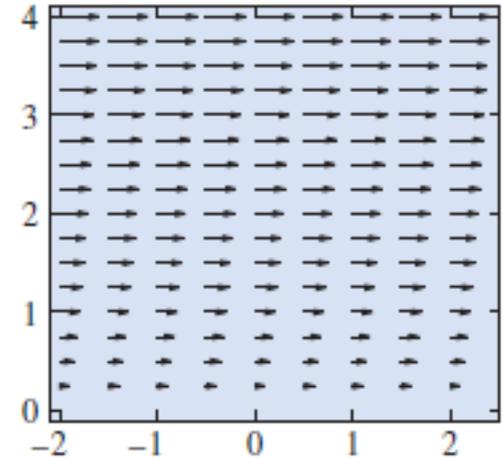
# Representações gráficas de campos vetoriais

Um campo vetorial no espaço bidimensional pode ser visto geometricamente desenhando-se vetores representativos  $\mathbf{F}(x, y)$  em alguns pontos bem selecionados do plano  $xy$ . Porém, assim como normalmente não é possível descrever completamente uma curva plana localizando um número finito de pontos, também não é normalmente possível descrever um campo vetorial localizando um número finito de vetores. Ainda assim, tais representações gráficas podem fornecer informações úteis acerca do comportamento geral do campo se os vetores forem escolhidos adequadamente.

105  
ANOS

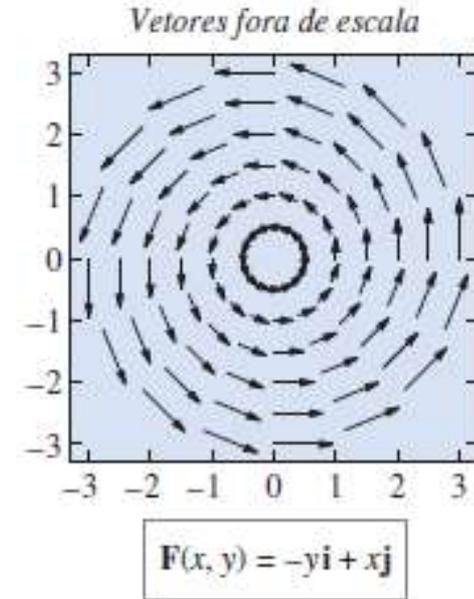
REDE FEDERAL  
DE EDUCAÇÃO  
PROFISSIONAL  
E TECNOLÓGICA  
1909-2014

O campo vetorial poderia descrever a **velocidade da corrente em um córrego em várias profundidades**. No fundo do córrego, a velocidade é zero, mas a velocidade da corrente aumenta à medida que a profundidade diminui. Pontos à mesma profundidade têm a mesma velocidade.



$$F(x, y) = \frac{1}{3} \sqrt{y} \mathbf{i}$$

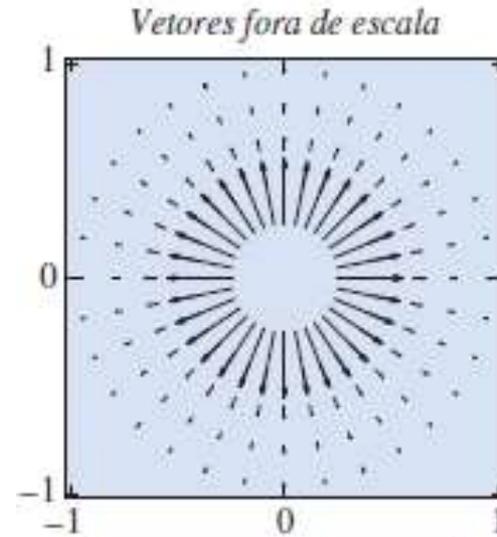
Este campo vetorial poderia descrever a **velocidade de pontos de uma roda em movimento**. No centro da roda, a velocidade é nula, mas a velocidade aumenta com a distância do centro. Pontos à mesma distância do centro têm a mesma velocidade.





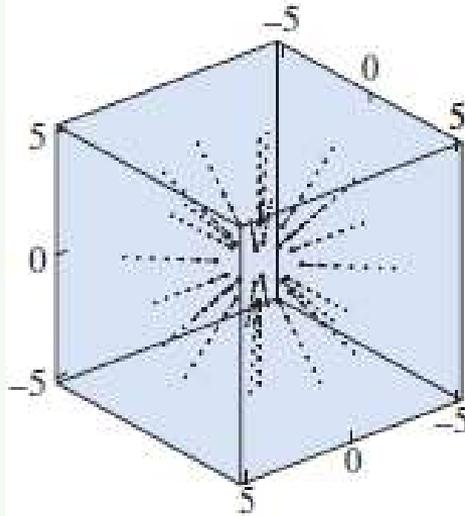
INSTITUTO FEDERAL  
SANTA CATARINA

Este campo poderia descrever a força de **repulsão de uma corrente elétrica** – quanto mais perto da carga, maior é a força repulsora.



$$F(x, y) = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{10(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

A figura mostra um campo vetorial no espaço tridimensional. Tais figuras tendem a ser confusas e, portanto, de menor valor que representações gráficas de campos vetoriais no espaço bidimensional.



$$F(x, y, z) = \frac{-xi + yj + zk}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$



## ■ UMA NOTAÇÃO COMPACTA PARA CAMPOS VETORIAIS

Às vezes, é útil denotar os campos vetoriais  $F(x, y)$  e  $F(x, y, z)$  completamente em notação vetorial identificando  $(x, y)$  com o vetor posição  $\mathbf{r} = xi + yj$  e  $(x, y, z)$  com o vetor posição  $\mathbf{r} = xi + yj + zk$ . Com essa notação, o campo vetorial tanto no espaço bi quanto tridimensional pode ser escrito como  $F(\mathbf{r})$ . Quando não houver possibilidade de confusão, omitiremos, algumas vezes, até o  $\mathbf{r}$  e denotaremos o campo vetorial como  $F$ .



# CAMPOS DE QUADRADO INVERSO

De acordo com a Lei da Gravitação Universal de Newton, partículas de massas  $m$  e  $M$  atraem uma à outra com uma força  $F$  de grandeza

$$\|F\| = \frac{GmM}{r^2} \quad (1)$$

onde  $r$  é a distância entre as partículas e  $G$  é uma constante. Supondo que o objeto de massa  $M$  esteja localizado na origem de um sistema de coordenadas  $xyz$  e que  $\mathbf{r}$  seja o vetor posição do objeto de massa  $m$ , então  $r = \|\mathbf{r}\|$ , e a força  $F(\mathbf{r})$  exercida pela partícula de massa  $M$  sobre a partícula de massa  $m$  tem a direção e o sentido do vetor unitário  $-\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|$ . Assim, por (1)

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{GmM}{\|\mathbf{r}\|^2} \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} = -\frac{GmM}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r} \quad (2)$$

Se  $m$  e  $M$  forem constantes e se tomarmos  $c = -GmM$ , essa fórmula pode ser dada por

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{c}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r}$$



**15.1.2 DEFINIÇÃO** Se  $\mathbf{r}$  for um vetor posição do espaço bi ou tridimensional e  $c$  for uma constante, então um campo vetorial da forma

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{c}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r} \quad (3)$$

é denominado um *campo de quadrado inverso*.



Observe que se  $c > 0$  em (3), então  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  tem a mesma direção de  $\mathbf{r}$ , de modo que cada vetor do campo é direcionado para longe da origem; e se  $c < 0$ , então  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  tem sentido oposto ao de  $\mathbf{r}$ , de modo que cada vetor do campo é direcionado para a origem. Em ambos os casos, a grandeza de  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre o ponto final de  $\mathbf{r}$  e a origem, pois

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{r})\| = \frac{|c|}{\|\mathbf{r}\|^3} \|\mathbf{r}\| = \frac{|c|}{\|\mathbf{r}\|^2}$$

# Campo de quadrado inverso

Pode ser escrito como:

Bidimensional:

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{c}{(x^2 + y^2)^{3/2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$$

(4)

Tridimensional:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{c}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

(5)



# CAMPO GRADIENTE

Uma classe importante de campos vetoriais surge do processo de calcular gradientes. Lembre-se de que se  $\phi$  for uma função de três variáveis, então o gradiente de  $\phi$  é definido como

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}$$

Essa fórmula define um campo vetorial do espaço tridimensional chamado de *campo gradiente de  $\phi$* . Analogamente, o gradiente de uma função de duas variáveis define um campo gradiente no espaço bidimensional. Em cada ponto de um campo gradiente em que o gradiente não for nulo, o vetor aponta na direção em que é máxima a taxa de aumento de  $\phi$ .



INSTITUTO FEDERAL  
SANTA CATARINA

Exemplo 1:  
Esboce o vetor gradiente de:

$$\phi(x, y) = x + y.$$



INSTITUTO FEDERAL  
SANTA CATARINA

Exemplo:  
Esboce o vetor gradiente de:

$$\phi(x, y) = x + y.$$

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$$



INSTITUTO FEDERAL  
SANTA CATARINA

## Agora é com você...

1. Esboce o vetor gradiente de:  
$$\phi(x, y) = 2x + 3y$$

R:  $\nabla\phi = 2i + 3j$

105  
ANOS

REDE FEDERAL  
DE EDUCAÇÃO  
PROFISSIONAL  
E TECNOLÓGICA  
1909-2014



INSTITUTO FEDERAL  
SANTA CATARINA

# CAMPOS CONSERVATIVOS E FUNÇÕES POTENCIAIS

**15.1.3 DEFINIÇÃO** Dizemos que um campo vetorial  $F$  do espaço bi ou tridimensional é *conservativo* em uma região se for o campo gradiente de alguma função  $\phi$  naquela região ou seja, se

$$F = \nabla\phi$$

A função  $\phi$  é denominada uma *função potencial* de  $F$  na região.



## EXEMPLO 2:

Campos de quadrado inverso são conservativos em qualquer região que não contenha a origem. Por exemplo, no caso bidimensional, a função:

$$\phi(x, y) = -\frac{c}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$$

É uma função potencial de em qualquer região que não contenha a origem, pois:



$$\begin{aligned}\nabla\phi(x, y) &= \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} \\ &= \frac{cx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\mathbf{i} + \frac{cy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\mathbf{j} \\ &= \frac{c}{(x^2 + y^2)^{3/2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \\ &= \mathbf{F}(x, y)\end{aligned}$$

## Agora é com você...

Verifique se, no caso tridimensional, a função:

$$\phi(x, y, z) = -\frac{c}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

é uma função potencial de (5).

Sim, é!



# DIVERGÊNCIA E ROTACIONAL

**15.1.4 DEFINIÇÃO** Se  $\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$ , definiremos a *divergência de F*, denotada  $\text{div } \mathbf{F}$ , como a função dada por

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \quad (7)$$

**15.1.5 DEFINIÇÃO** Se  $\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$ , definiremos o *rotacional de F*, denotado  $\text{rot } \mathbf{F}$ , como o campo vetorial dado por

$$\text{rot } \mathbf{F} = \left( \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (8)$$



INSTITUTO FEDERAL  
SANTA CATARINA

Para fins computacionais é conveniente notar que a fórmula do rotacional pode ser expressa sob a forma de determinante:

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix} \quad (9)$$



INSTITUTO FEDERAL  
SANTA CATARINA

## Exemplo 3:

Calcule a divergência e o rotacional do campo vetorial:

$$F(x, y, z) = x^2yi + 2y^3zj + 3zk$$



INSTITUTO FEDERAL  
SANTA CATARINA

*Solução* Por (7)

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 y) + \frac{\partial}{\partial y}(2y^3 z) + \frac{\partial}{\partial z}(3z) \\ &= 2xy + 6y^2 z + 3\end{aligned}$$

105  
ANOS

REDE FEDERAL  
DE EDUCAÇÃO  
PROFISSIONAL  
E TECNOLÓGICA  
1909-2014



INSTITUTO FEDERAL  
SANTA CATARINA

Solução:

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & 2y^3z & 3z \end{vmatrix} \\ &= \left[ \frac{\partial}{\partial y}(3z) - \frac{\partial}{\partial z}(2y^3z) \right] \mathbf{i} + \left[ \frac{\partial}{\partial z}(x^2y) - \frac{\partial}{\partial x}(3z) \right] \mathbf{j} + \left[ \frac{\partial}{\partial x}(2y^3z) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2y) \right] \mathbf{k} \\ &= -2y^3\mathbf{i} - x^2\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft\end{aligned}$$

## Agora é com você...

Calcule a divergência e o rotacional do campo vetorial:

$$F(x, y, z) = x^2yz \, i + xy^3z^2j - xyz \, k$$

$$\operatorname{div} F = 2xyz + 3xy^2z^2 - xy$$

$$\operatorname{rot} F = (-xz - 2xy^3z)i + (x^2y + yz)j + (y^3z^2 - x^2z)k$$



## Exemplo 4:

Mostre que a divergência do campo de quadrado inverso

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{c}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (xi + yj + zk)$$

é nulo.



INSTITUTO FEDERAL  
SANTA CATARINA

**Solução** Os cálculos podem ser simplificados fazendo-se  $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ , caso em que  $\mathbf{F}$  pode ser expresso como

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{cx\mathbf{i} + cy\mathbf{j} + cz\mathbf{k}}{r^3} = \frac{cx}{r^3}\mathbf{i} + \frac{cy}{r^3}\mathbf{j} + \frac{cz}{r^3}\mathbf{k}$$

Deixamos a cargo do leitor mostrar que

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$



Assim,

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = c \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{z}{r^3} \right) \right]$$

No entanto,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{r^3} \right) = \frac{r^3 - x(3r^2)(x/r)}{(r^3)^2} = \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{r^3} \right) = \frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{z}{r^3} \right) = \frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}$$

Substituindo essas expressões em (10), obtemos

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = c \left[ \frac{3}{r^3} - \frac{3x^2 + 3y^2 + 3z^2}{r^5} \right] = c \left[ \frac{3}{r^3} - \frac{3r^2}{r^5} \right] = 0 \quad \blacktriangleleft$$



INSTITUTO FEDERAL  
SANTA CATARINA

No cálculo vetorial o **gradiente** (ou **vetor gradiente**) é um vetor que indica o sentido e a direção na qual, por deslocamento a partir do ponto especificado, obtém-se o maior incremento possível no valor de uma grandeza a partir da qual se define um campo escalar para o espaço em consideração.

105  
ANOS

REDE FEDERAL  
DE EDUCAÇÃO  
PROFISSIONAL  
E TECNOLÓGICA  
1909-2014



INSTITUTO FEDERAL  
SANTA CATARINA

## Divergência e Rotacional

Esses nomes originaram-se no estudo do fluxo fluido, caso em que divergência refere-se à maneira como o fluido flui para ou afasta-se de um ponto; já rotacional refere-se às propriedades de rotação do fluido em um ponto.

105  
ANOS

REDE FEDERAL  
DE EDUCAÇÃO  
PROFISSIONAL  
E TECNOLÓGICA  
1909-2014



## O OPERADOR $\nabla$

Até aqui, não foi dado um significado próprio ao símbolo  $\nabla$  que aparece na expressão do gradiente  $\nabla\phi$ . Entretanto, é conveniente considerar  $\nabla$  como um operador

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \quad (11)$$

que, aplicado a  $\phi(x, y, z)$ , produz o gradiente

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \mathbf{k}$$

Chamamos (11) de *operador del*. Ele é análogo ao operador de derivada  $d/dx$  que, quando aplicado a  $f(x)$ , produz a derivada  $f'(x)$ .



O operador del permite-nos expressar a divergência de um campo vetorial

$$\mathbf{F} = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$$

em notação de produto escalar como

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \quad (12)$$

e o rotacional desse campo em notação de produto vetorial como

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix} \quad (13)$$



INSTITUTO FEDERAL  
SANTA CATARINA

# O LAPLACIANO $\nabla^2$

O operador que resulta aplicando-se o operador del a si mesmo é denotado por  $\nabla^2$  e é chamado de *operador laplaciano*. Esse operador tem a forma

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (14)$$



Quando aplicado a  $\phi(x, y, z)$ , o operador laplaciano produz a função

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

Note que  $\nabla^2\phi$  também pode ser expresso como  $\text{div}(\nabla\phi)$ . A equação  $\nabla^2\phi = 0$  ou sua equivalente

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$$

é conhecida como *equação de Laplace*. Essa equação diferencial parcial desempenha um papel importante em uma grande variedade de aplicações, resultante do fato de ser satisfeita pela função potencial do campo de quadrado inverso.



INSTITUTO FEDERAL  
SANTA CATARINA

Exemplo:  
Vamos calcular o laplaciano da função:

$$\phi = x^2yz + xy^3z^2 - xyz$$

# Agora é com você...

1. A função  $\phi(x, y, z) = xy + yz + xz$  é um potencial do campo vetorial

$$\mathbf{F} = \underline{(x + y)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}}.$$

2. O campo vetorial  $F(x, y, z) = yzi + xy^2j + yz^2k$  tem divergência  $2xy + 2yz$  e rotacional

$$\underline{z^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (y^2 - z)\mathbf{k}}.$$



INSTITUTO FEDERAL  
SANTA CATARINA

3. Calcular o laplaciano da função:

$$\emptyset = \text{sen}x + \text{cos}xy - z^3 \text{cos}x$$



17-22 Calcule  $\text{div } F$  e  $\text{rot } F$ . ■

17.  $F(x, y, z) = x^2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$

18.  $F(x, y, z) = xz^3\mathbf{i} + 2y^4x^2\mathbf{j} + 5z^2y\mathbf{k}$

19.  $F(x, y, z) = 7y^3z^2\mathbf{i} - 8x^2z^5\mathbf{j} - 3xy^4\mathbf{k}$

20.  $F(x, y, z) = e^{xy}\mathbf{i} - \cos y\mathbf{j} + \text{sen}^2z\mathbf{k}$



INSTITUTO FEDERAL  
SANTA CATARINA

23-24 Calcule  $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G})$ . ■

24.  $\mathbf{F}(x, y, z) = yzi + xzj + xyk$   
 $\mathbf{G}(x, y, z) = xyj + xyzk$

105  
ANOS

REDE FEDERAL  
DE EDUCAÇÃO  
PROFISSIONAL  
E TECNOLÓGICA  
1909-2014